T O P O L O G I A
WPPT I, sem. letni
EGZAMIN PODSTAWOWY
Z ROZWIĄZANIAMI

Wrocław, 17 czerwca 2004

ZADANIE 1.
Czy $d(x,y) = (x-y)^2$ jest metryką na prostej rzeczywistej? Odpowiedź uzasadnij!

ROZWIĄZANIE: Nie. Nie spełniony jest warunek trójkąta, na przykład $d(0,1) = 1$, $d(1,2) = 1$, $d(0,2) = 4$, więc $d(0,2) > d(0,1) + d(1,2)$.

ZADANIE 2.
Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni metrycznej ciąg podstawowy mający podciąg zbieżny jest zbieżny.

ROZWIĄZANIE: Niech (a_n) będzie ciągiem podstawowym i (a_{n_k}) jego podciągiem zbieżnym do jakiejś granicy a. Ustalmy $\epsilon > 0$. Istnieje n_0 takie, że dla $n, m > n_0$ mamy $d(a_n, a_m) < \frac{\epsilon}{2}$ (podstawowość). Ponadto istnieje k_0 takie, że dla $k > k_0$ mamy $d(a_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}$ (zbieżność podciągu). Zatem kładąc $n_1 = \max\{n_0, n_{k_0}\}$ i posiłkując się punktem a_{n_k} z jakimkolwiek indeksem $k > k_0$ otrzymujemy, dla $n > n_1$

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Wykazaliśmy zbieżność ciągu (a_n) do granicy a.

ZADANIE 3.
Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech $f : X \to Y$ będzie dowolną funkcją o wartościach w przestrzeni dyskretnej Y. Wykaż, że zbiór punktów nieciągłości funkcji f jest domknięty.

ROZWIĄZANIE: Pokażemy równoważnie, że zbiór punktów ciągłości jest otwarty. Jeśli jest to zbór pusty, to jest on otwarty. Załóżmy więc niepustość i niech x_0 będzie punktem ciągłości funkcji f. Zatem na pewnym otoczeniu U punktu x_0 funkcja ta przyjmuje wartości $y \in Y$ różniące się od $y_0 = f(x_0)$ o mniej niż 1. Ale w metryce dyskretnej to oznacza, że na U funkcja jest stała i równa y_0 (różne wartości dzieli odległość równa 1). Zatem każdy punkt x zbioru U spełnia warunek, że na pewnym jego otoczeniu (mianowicie na U) funkcja jest stała, a zatem różni się od $f(x)$ o mniej niż dowolny $\epsilon > 0$, czyli x też jest punktem ciągłości. Pokazaliśmy, że zbiór punktów ciągłości każdy swój punkt x_0 zawiera wraz z pewnym otoczeniem, więc jest to zbiór otwarty.

ZADANIE 4.
Oblicz granicę ciągu rekurencyjnego

$a_1 = 13\pi$,

$a_{n+1} = \frac{7}{8}a_n + 50$.

ROZWIĄZANIE: Rozważmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(x) = \tfrac{7}{8}x + 50.$$

Jego pochodna jest stała i wynosi $\frac{7}{8}$, a więc spełnia ono warunek Lipshitza ze stałą mniejsza od jeden, czyli jest to odwzorowanie zbliżające. Rozważany ciąg, to ciąg iteracji $f^n(a_1)$. Z twierdzenia Banacha ($\mathbb{R}$ jest przestrzenią zupełną) ciąg ten zbiega do jedynego fixpunktu odwzorowania f. Aby znaleźć ten fixpunkt rozwiązujemy równanie $f(x) = x$, czyli $x = \frac{7}{8}x + 50$. Rozwiązaniem jest $x_0 = 400$ i to jest szukana granica.

ZADANIE 5.
Niech f będzie funkcją rzeczywistą ciągłą określoną na przestrzeni metrycznej zwartej X. Wykaż, że jeśli $\forall_{x\in X}\ f(x) > 0$, to istnieje $\epsilon > 0$ taki, że $\forall_{x\in X}\ f(x) \geq \epsilon$.

ROZWIĄZANIE: Funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje minimum w jakimś punkcie x_0. Ponieważ $f(x_0) > 0$, to wystarczy przyjąć $\epsilon = f(x_0)$.

Inny sposób: Przypuśćmy, że to nie prawda. Wtedy dla dowolnego ϵ, na przykład dla $\frac{1}{n}$, istniałby punkt x_n taki, że $f(x_n) < \frac{1}{n}$. Wybierzmy podciąg zbieżny x_{n_k} ciągu x_n i jego granicę oznaczmy przez x_0. Z ciągłości funkcji f mamy $f(x_0) = \lim f(x_{n_k}) \leq \lim \frac{1}{n_k} = 0$. Sprzeczność, bo $f(x_0) > 0$.

ZADANIE 6.
Niech A będzie podzbiorem I kategorii prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Udowodnij, że dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ translacja $A+x = \{a+x : a \in A\}$ zbioru A jest rozłączna ze zbiorem liczb wymiernych.

ROZWIĄZANIE: Załóżmy, że to nie prawda. Wtedy dla każdego x istniałoby $a \in A$ takie, że $a+x = q \in Q$, czyli $a-q = -x$. Zapiszmy to z kwantyfikatorami:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{a\in A}\ \exists_{q\in Q}\quad a-q = -x.$$

Kwantyfikatory szczegółowe można przestawić i zamienić na sumy zbiorów. Suma po $a \in A$ punktów $a-q$ daje translację $A-q$ zbioru A. Zatem piszemy

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \bigcup_{q\in Q} A-q \ni -x.$$

Ponieważ $-x$ przebiega cały zbór $\mathbb{R}$, więc dostaliśmy

$$\bigcup_{q\in Q} A-q = \mathbb{R}.$$

Jest to sprzeczność z twierdzeniem Baire'a, bowiem:

(1) każda translacja jest homeomorfizmem całej prostej na siebie, zatem translacja $A-q$ zbioru I kategorii jest zbiorem I kategorii,

(2) suma indeksowana liczbami wymiernymi jest przeliczalna, zatem cała suma jest też zbiorem I kategorii,

(3) $\mathbb{R}$ jest przestrzenią mertyczną zupełną, więc nie jest I kategorii.

ZADANIE 7.
Wykaż, że w zbiorze $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (wszystkich funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej) z topologią produktową funkcje ciągłe tworzą podzbiór gęsty.

ROZWIĄZANIE: Zbiór otwarty bazowy U w topologii produktowej wygląda tak: ustalamy skończenie wiele punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i skończenie wiele niepustych zbiorów otwartych $U_1, U_2, \ldots, U_n$ na prostej. Zbiór U to zbiór wszystkich funkcji spełniających warunki $f(x_1) \in U_1,\ f(x_2) \in U_2,\ \ldots,\ f(x_n) \in U_n$. Wystarczy wskazać funkcję ciągłą należącą do U. W tym celu wybierzmy dowolne wartości $y_1 \in U_1,\ y_2 \in U_2,\ \ldots,\ y_n \in U_n$ i niech f będzie funkcją łamaną przechodzącą przez punkty $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$. Funkcja ta spełnia warunki klasyfikujące ją do zbioru U i jako łamana jest ciągła.

Tomasz Downarowicz